第6章　積分法の応用

（1）面積

①　曲線　$y=f(x)$ で定義される図形の面積

曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=a,\ x=b$　ただし $a<b$ で囲まれた部分の面積 S とおく。

区間[a，b] で常に $f(x)\geqq 0$のとき　$S=\int_a^b f(x)dx$

区間[a，b] で常に $f(x)\leqq 0$のとき　$S=-\int_a^b f(x)dx$

さらに　2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と2直線　$x=a$，$x=b$　ただし $a<b$

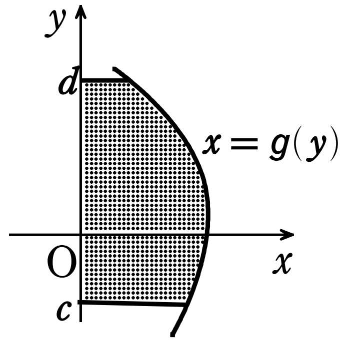
で囲まれた部分の面積　$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

②　曲線　$x=g(y)$ で定義された図形の面積

区間　$c\leqq y\leqq d$ で常に $g(y)\geqq 0$ とする。

曲線 $x=g(y)$ と y 軸および2直線 $y=c$，$y=d$

で囲まれた部分の面積　$S=\int_c^d g(y)dy$



③　曲線で囲まれた図形の面積

<u>例題</u>　曲線 $y^2=x^2(1-x^2)$ で囲まれた図形の面積Sを求めよ。

この曲線は x 軸 y 軸について対称　よって　第1象限内における曲線

$y=x\sqrt{1-x^2}$ と両軸で囲まれた部分の面積 $\frac{1}{4}S$ で考えることにする。

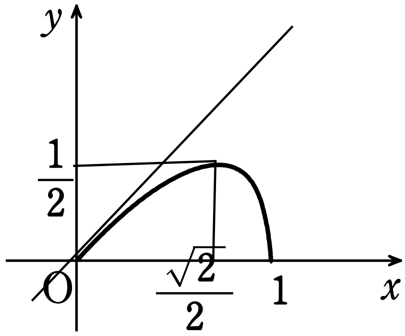
微分して　$y'=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$　ただし $x\fallingdotseq 1$

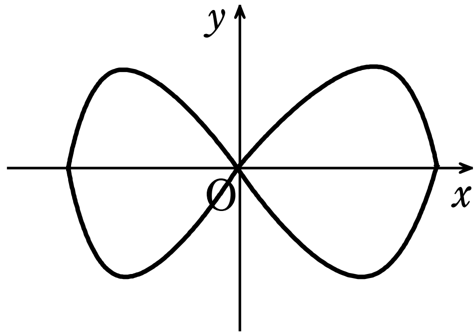
$y'=0$ のとき　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　増減表

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
y'	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	0	↗	極大	↘	0

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき　極大値 $\dfrac{1}{2}$

第１象限における概形　　　　　曲線 $y^2=x^2(1-x^2)$ の概形





第１象限における図形の面積

$\dfrac{1}{4}S=\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$　置換積分　$\sqrt{1-x^2}=t$ とおく。

$1-x^2=t^2$ より　微分して　$-2xdx=2tdt$　よって　$xdx=-tdt$

x	$0\to1$
t	$1\to0$

$\dfrac{1}{4}S=\displaystyle\int_1^0 t(-t)dt=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$　　ゆえに　$S=\dfrac{4}{3}$

④　媒介変数表示と面積

例題で考えてみよう

例題１　サイクロイド

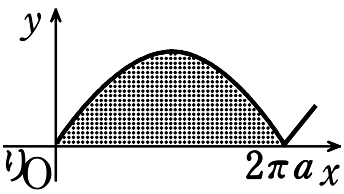
$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$　ただし　$a>0$

$0\leqq t\leqq 2\pi$，x軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

サイクロイド（右図）は $0\leqq x\leqq 2\pi a$ において　$x=\pi a$ で対称であるから

$\dfrac{1}{2}S=\displaystyle\int_0^{\pi a} y\,dx$　　dx を dt に置き換えたい　置換積分　$x=a(t-\sin t)$

微分して $dx=a(1-\cos t)\,dt$



x	$0\to\pi a$
t	$0\to\pi$

また　$y=a(1-\cos t)$ より

$$\frac{1}{2}S=\int_0^{\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt = a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)^2dt$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left\{2\sin^2\frac{t}{2}\right\}^2=4a^2\int_0^{\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,dt$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^4\frac{t}{2}dt$　　置換積分　$\dfrac{t}{2}=\theta$ とおく。$dt=2d\theta$

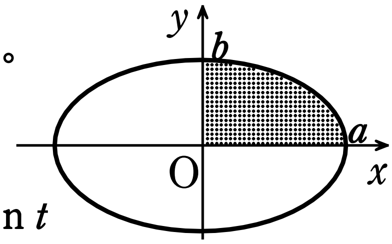
$$\int_0^{\pi}\sin^4\frac{t}{2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi$$

従って　$S=2\times4a^2\times\frac{3}{8}\pi=3\pi a^2$

例題2　楕円　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ の面積 $S=\pi ab$ であることを示せ。

媒介変数表示　$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$　ただし　$0\leqq t<2\pi$

楕円の対称性から　第1象限で面積を求める。



$\frac{1}{4}S=\int_0^a y\,dx$　dx を dt に置き換えたい

置換積分 $x=a\cos t$　微分して $dx=-a\sin t$

x	$0\to a$
t	$\frac{\pi}{2}\to0$

$$\frac{1}{4}S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt$$

従って　S$=4ab\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\pi ab$

参考　楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ において　$a=b$ のとき

半径 a の円　従って　円の面積　πa^2 が示される。